COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures)

(L'épreuve est constituée d'un seul problème.)

A Soient x_0 et y_0 deux réels strictement positifs. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3x_n + 4y_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1 - Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $z_n = \frac{y_n}{x_n}$.

a) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $0 < z_n < 4$.

c) Etudier les variations de la suite $(z_n)_{n\geq 0}$, puis sa limite quand n tend vers l'infini.

2 - a) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice diagonale D que l'on précisera. Expliciter une relation entre A et D.

b) Calculer A^n, pour tout $n \geq 1$.

c) En déduire les expressions de x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et n.

B On désigne par φ l'application qui à tout point M = (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le point M' = (x', y') défini par :

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

1 - Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le segment de droite S_θ d'extrémités (0, 0) et $(\cos\theta, \sin\theta)$.

a) Montrer que l'image de S_θ par φ est un segment de droite que l'on caractérisera.

b) Soit θ_0 la valeur de θ pour laquelle $\varphi(S_\theta)$ a la même pente que S_θ. Calculer $\tan\theta_0$.

2 - Etudier l'arc de courbe paramétrée défini par :

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta + \sin\theta \\ y = 3\cos\theta + 4\sin\theta \end{cases}$$

pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On s'intéressera en particulier aux coordonnées de quatre points remarquables, ainsi qu'aux tangentes à la courbe en ces points.

3 - Dans le plan réel, on considère l'ensemble Δ des points (x, y) défini par :

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Déterminer et tracer l'image de Δ par φ.

4 - Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$, φ^0 étant l'identité ; calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la distance de $\varphi^n(M_0)$ à la droite d'équation $y = x.\tan\theta_0$, où θ_0 est la valeur définie en 1-b).

C On considère un couple (X_0, Y_0) de variables aléatoires réelles de densité uniforme sur Δ, où Δ est l'ensemble défini en **B** 3. On définit deux suites $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires par :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 2X_n + Y_n \\ Y_{n+1} = 3X_n + 4Y_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1 - Indiquer si les variables X_0 et Y_0 sont ou non indépendantes, en justifiant la réponse.

2 - Calculer la fonction de répartition de X_0.

3 - Calculer les espérances de X_n et de Y_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 - Calculer les variances de X_0 et de Y_0, ainsi que la covariance de X_0 et Y_0.

5 - Calculer les variances de X_1 et de Y_1.

D Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n et Y_n étant les variables aléatoires définies en **C**, on définit la variable aléatoire $Z_n = \frac{Y_n}{X_n}$ lorsque X_n prend une valeur non nulle (l'événement "$X_n = 0$" étant de probabilité nulle, on ne s'intéresse pas à Z_n dans ce cas). On note F_n la fonction de répartition de Z_n.

1 - Déterminer F_0.

2 - Exprimer F_{n+1} à l'aide de F_n.

3 - Pour $n \geq 0$, on note $]\alpha_n, \beta_n[$ l'intervalle sur lequel F_n est strictement compris entre 0 et 1. Préciser α_0, β_0, α_1 et β_1. Exprimer, pour $n \geq 1$, α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n, puis en fonction de n.

4 - θ_0 étant la valeur définie en **B** 1-b), montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ tendent vers $\tan\theta_0$.

5 - On note f_n la fonction de densité de Z_n.
a) Calculer $f_n(\tan\theta_0)$.
b) Soit t un réel. Indiquer selon t la limite de la suite $(f_n(t))_{n\geq 0}$ quand n tend vers l'infini.
c) Donner l'allure des courbes f_0, f_1, f_2 (il n'est pas demandé de faire une étude précise de ces fonctions).